

I Généralités sur les polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel positif ($n \in \mathbb{N}$). Ce chapitre a pour but de généraliser les notions sur les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vues en première année aux polynômes à coefficients complexes.

I-1 Définitions et vocabulaire de base

Définition

On note X la **fonction identité** de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

⚠ CONFUSION DE NOTATION

Ne pas confondre X qui est une application et le réel x ci-dessus. Ainsi, si par exemple on écrit $P = X$, P est bien une application qui peut s'évaluer en n'importe quel nombre réel. Par exemple ici, $P(2) = 2$.

Définition

Soit a un élément de $\mathbb{K}$. On appelle *monôme de degré n et de coefficient a* l'application

$$\begin{aligned} aX^n : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto ax^n \end{aligned}$$

De manière générale :

Définition

Soit P une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'il existe un entier naturel m ainsi que $m+1$ éléments de $\mathbb{K}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$, tels que :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_mX^m$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \end{aligned}$$

■ Exemple 1 :

Les termes $-\pi X^2$, $(1+2i)X$ et $\sqrt{2}$ sont les trois monômes constituant le polynôme $P = -\pi X^2 + (1+2i)X + \sqrt{2}$.

📖 Notation :

Il arrive fréquemment d'observer la notation $P(X)$ au lieu de P . (par exemple $P(X) = \frac{1}{2}X^2 - i\sqrt{3}X + 1$)

Celle-ci est à comprendre comme une composition d'applications, c'est-à-dire :

$$P(X) = P \circ X = P \circ id = P$$

Moralité, écrire P ou écrire $P(X)$ est en réalité la même chose. (contrairement à $P(2)$ et P qui sont deux objets différents ! L'un est un nombre et l'autre une fonction...)

⚠ CONFUSION

Considérant la notation précédente, si $x \in \mathbb{K}$, remarquons alors que $P(X)$ et $P(x)$ sont deux objets de **types différents** ! $P(x) \in \mathbb{K}$ est un nombre. C'est l'image de $x \in K$ par l'application $P(X)$.

■ Exemple 2 :

Si $P(X) = X^2 - i\sqrt{3}X + 1$ est un polynôme, alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = x^2 - i\sqrt{3}x + 1$ est un nombre complexe. Par exemple, pour $x = i$, on a $P(i) = i^2 - i^2\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} \in \mathbb{C}$

Définition

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition

Les éléments de $\mathbb{R}[X]$ sont appelés *polynômes à coefficients réels*.
Les éléments de $\mathbb{C}[X]$ sont appelés *polynômes à coefficients complexes*.

⚠ Remarque :

Dans l'écriture $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, on ne demande pas nécessairement que $a_n \neq 0$. Ainsi, quitte à rajouter (ou suivant les cas, retirer) des a_i nuls (par exemple $a_{n+1}, \dots, a_m = 0$), on peut également écrire que

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \dots + a_mX^m \quad \text{avec } n \neq m$$

Cette écriture sera très pratique pour la suite des définitions et propriétés.

■ Exemple 3 :

$1 + 2X + X^3 = 1 + 2X + X^3 + 0 \cdot X^4 + 0 \cdot X^5 \quad (n = 3, m = 5.)$

I-2 Polynôme nul et unicité de l'écriture d'un polynôme



Notation :

On note 0 le polynôme nul. C'est le polynôme suivant :

$$\begin{aligned} 0: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$



CONFUSION

C'est bien une application dont l'image est nulle pour **tout** $x \in \mathbb{R}$, à ne pas confondre avec une application qui s'annule en l'un ou l'autre point. Par exemple,

$$\begin{aligned} P = 1 + X: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto i + x \end{aligned}$$

s'annule en $x = -i$, mais ce n'est en aucun cas le polynôme nul, puisque si on prend par exemple $x = 1$, on obtient $P(1) = 1 + i \neq 0$. En réalité, il n'y a qu'une seule possibilité pour qu'un polynôme soit nul :

Proposition

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On pose $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. On a :

$$P = 0 \iff a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Démonstration :

On peut démontrer ceci par exemple par récurrence sur n , on se référera à la démonstration de première année sur les polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ (et au cas échéant, on admettra qu'elle se généralise à $\mathbb{C}[X]$.) $\square$

Commentaires :

De cette proposition découle le corollaire suivant qui permet donc l'identification des coefficients de deux polynômes égaux :

Corollaire *Unicité des coefficients*

Soient m un entier naturel, ainsi que $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$. On pose $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$. Quitte à rajouter des $a_i = 0$ ou $b_j = 0$, on peut supposer que $n = m$. Alors

$$P = Q \iff \begin{cases} a_0 = b_0 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Démonstration :

La démonstration vue en première année se généralise aisément ici au cas de $\mathbb{C}[X]$. Elle repose sur la proposition précédente. $\square$

I-3 Degré d'un polynôme



Définition

Soit P un polynôme non nul défini par $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

- On appelle *degré de P* le plus grand entier N tel que $a_N \neq 0$. On le note $\deg(P)$.
- On appelle *terme dominant de P* (ou monôme dominant) le monôme a_NX^N .
- On appelle *coefficient dominant de P* le nombre a_N précédemment défini.

■ Exemple 4 :

| Si $P = 0 \times X^3 + \pi X^2 + 0 \times X + i$, on a $\deg P = 2$ avec P de coeff. dominant π .

Convention

La définition précédente ne fonctionne pas si P est le polynôme nul. Pour des futurs raisonnements de calcul, on pose par convention

$$\deg(0) = -\infty.$$



Notation :

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le degré est inférieur ou égal à n .



CONFUSION

Contrairement à une erreur fréquemment commise, on ne demande pas à ce que ce le degré d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ soient "égal" à n , mais bien "inférieur ou égal". Par exemple :

$$X \in \mathbb{C}_2[X].$$

■ Exemple 5 :

| $X^2 - iX + e^{i\frac{\pi}{4}}$ appartiennent à $\mathbb{C}_2[X]$ mais $X^3 + iX$ n'appartient pas à $\mathbb{C}_2[X]$.

II Opérations sur les polynômes

II-1 Définitions et propriétés élémentaires

Les polynômes sont des applications. Toutes les opérations dans $\mathbb{R}[X]$ découlent donc de celles des fonctions réelles. Pour des raisons de cohérence de définition, on généralise donc ceci aux polynômes de $\mathbb{C}[X]$.



Définition

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

- On définit la fonction $P + Q$ sur $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

- On définit la fonction λP sur $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, (\lambda P)(x) = \lambda P(x)$$

- On définit la fonction $P \times Q$ sur $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$$

- On définit la fonction $P \circ Q$ sur $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P \circ Q)(x) = P(Q(x)).$$



Exercice 1

Posons $P = 4X^2 - 5X + \pi$ et $Q = 3X + iX^3$, montrer que $P \circ Q = -4X^6 + 24iX^4 - 5iX^3 + 36X^2 - 15X + \pi$.

Solution

$$\begin{aligned}
 P \circ Q &= 4(3X + iX^3)^2 - 5(3X + iX^3) + \pi \\
 &= 4(9X^2 - X6 + 6iX^4) - 15X - 5iX^3 + \pi \\
 &= -4X^6 + 24iX^4 - 5iX^3 + 36X^2 - 15X + \pi
 \end{aligned}$$

Cette définition donne lieu aux propriétés suivantes :

Propriété

Soient P, Q et R trois polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

- | | |
|--|---|
| 1. $P + Q = Q + P$ | 7. $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$ |
| 2. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ | 8. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$ |
| 3. $P + 0 = P$ | 9. $P \times 1 = P$ |
| 4. $P + (-P) = 0$ | 10. $(P + Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$ |
| 5. $P \times Q = Q \times P$ | 11. $(\lambda P) \circ Q = \lambda(P \circ Q)$ |
| 6. $\lambda(Q \times R) = (\lambda Q) \times R = Q \times (\lambda R)$ | 12. $(P \times Q) \circ R = (P \circ R) \times (Q \circ R)$ |
| | 13. $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$ |



Remarque :

On peut calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$ avec $P(X) = 1 + X + X^2$ et $Q(X) = X^2$. On constate qu'en général

$$P \circ Q \neq Q \circ P$$

La commutativité du produit ($PQ = QP$) quant à elle entraîne :

Proposition Formule du binôme de Newton

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a :

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$



NOTION DE DÉRIVÉE

La notion de **dérivée ne se généralise pas** dans votre programme aux polynômes quelconques dans $\mathbb{C}[X]$. Pour revoir la question de la dérivée dans $\mathbb{R}[X]$, on se référera donc au cours de première année.

II-2

Résultat des opérations sur les coefficients

De même que tout à l'heure, les résultats des opérations sur les polynômes s'étendent à $\mathbb{C}[X]$. On va les expliciter ci-dessous. Pour les besoins des énoncés, on rappelle que si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N$ est un polynôme de degré N , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$, on a également

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N + a_{N+1}X^{N+1} + \dots + a_nX^n$$

avec $a_{N+1}, \dots, a_n = 0$.

Proposition (opérations élémentaires)

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. On note :

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n$$

(n n'étant pas forcément le degré de P et Q !)

- $P + Q$ est un polynôme et on a :

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n.$$

- λP est un polynôme et on a : $\lambda P = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \dots + \lambda a_nX^n$.

- $P \times Q$ est un polynôme et on a (en posant $a_i = 0$ et $b_i = 0$ si i n'est pas dans $\llbracket 0, n \rrbracket$)

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \quad \text{avec, pour tout } m \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$$



Remarque :

En ce qui concerne la multiplication, la formule avec les " c_k ", n'est en général utilisée que dans un cadre théorique. Plus concrètement, si on veut faire le produit de deux polynômes, on le fait généralement en respectant les règles de développement classique des parenthèses !

■ Exemple 6 :

Si $P = 1 + iX$ et $Q = X^2 + 3$, alors

$$P \times Q = (1 + iX)(X^2 + 3) = (X^2 + 3) + iX(X^2 + 3) = 3 + 3iX + X^2 + iX^3$$



Remarque :

La formule énoncée dans la proposition se rapproche un peu plus de la technique du produit "à vue", où on cherche à déterminer au vol les coefficients devant les X^k .

■ Exemple 7 :

Si $P = 1 + iX$ et $Q = X^2 + 3$, alors on sait qu'en faisant le produit, on obtiendra une constante et X, X^2, X^3 .

$$P \times Q = ? + ?X + ?X^2 + ?X^3$$

On observe ici que par développement :

- la constante s'obtient en faisant 1×3 .
- le coefficient devant X s'obtient seulement en faisant $iX \times 3$
- le coefficient devant X^2 s'obtient seulement en faisant $1 \times X^2$
- le coefficient devant X^3 s'obtient seulement en faisant $iX \times X^2$

D'où

$$P \times Q = 3 + 3iX + X^2 + iX^3$$

II-3 Résultat des opérations sur les degrés

Propriété

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On a : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Si on sait que $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Si $\lambda \neq 0$ alors : $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
- On a : $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Démonstration :

La démonstration de première année se généralise sans problème au cas $\mathbb{C}[X]$. $\square$

■ Exemples :

Le cas de $P + Q$ dépend du fait que les coefficients dominants se "compensent" ou non :

8 ■ Si $P = 1 + iX - \sqrt{2}X^3$ et $Q = \pi - X^3$, alors $P + Q = (1 + \pi) + iX + (\sqrt{2} - 1)X^3$.
Ici,

$$\deg(P + Q) = \deg P = \deg Q$$

9 ■ Si $P = 1 + iX + X^3$ et $Q = \pi - X^3$, alors $P + Q = (1 + \pi) + iX$.
Ici,

$$\deg(P + Q) < \deg P, \deg Q$$



Remarque :

La propriété $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ est bien valable également si P ou Q (ou les deux) est nul. Elle respecte bien la convention " $\deg 0 = -\infty$ ". En effet, si par exemple P est nul, on a également $P \times Q = 0$ et alors

$$\deg(P \times Q) = -\infty$$

et

$$\deg(P) + \deg(Q) = -\infty + \deg(Q) = -\infty$$

car il ne peut y avoir de forme indéterminée ($\deg(Q)$ est soit un nombre fini, soit $-\infty$.)

Corollaire

Avec les notations précédentes, $\deg P^n = n \deg P$

Démonstration :

Cette démonstration se fait par récurrence sur n , avec le passage de l'hérédité qui se fait grâce à $P^{n+1} = P^n P$ et à la propriété du degré de $P \times Q$. $\square$

Corollaire Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a :

$$P \times Q = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Démonstration :

D'après l'hypothèse, on a $\deg(P \times Q) = \deg(0) = -\infty$.
D'après les propriétés, on a

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

D'où

$$\deg(P) + \deg(Q) = -\infty$$

ce qui n'est possible que si l'un au moins parmi $\deg(P)$ ou $\deg(Q)$ est $-\infty$, c'est-à-dire que si l'un au moins des polynômes P ou Q est nul. $\square$

Corollaire simplification dans $\mathbb{K}[X]$

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$, avec A non nuls

$$AB = AC \iff B = C$$

Démonstration :

$$AB = AC \iff A(B - C) = 0 \iff_{A \neq 0} B - C = 0$$

□

III Décomposition d'un polynôme en sous-facteurs

III-1 Divisibilité

Définition

Soient A et P dans $\mathbb{K}[X]$. On dit que A *divise* P et on note $A|P$ s'il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que : $P = A \times Q$. On dit alors que :

- P est un *multiple* de A ou P est *divisible* par A .
- A est un *diviseur* de P .
- Q est le *quotient* de P par A .

Exemples :

- 10 ■ $X - i$ et $X + i$ divisent tous deux $X^2 + 1$ car $X^2 + 1 = (X + i) \times (X - i)$.
- 11 ■ Tout polynôme divise 0.

CONFUSION
Ne pas confondre la divisibilité des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ et la divisibilité d'éventuels coefficients entiers !

Exemple 12 :

Le polynôme constant 2 divise $X + i$. On a en effet

$$X + i = 2 \left(\frac{1}{2}X + \frac{i}{2} \right)$$

N'oublions pas que les coefficients peuvent être quelconques dans $\mathbb{K}$. Rien ne les oblige à être entiers ...

Remarque :

Partant de ce principe, on peut constater que les polynômes constants non nuls divisent n'importe quel autre polynôme.

Proposition

Soient A et P deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

$$A \text{ divise } P \implies \deg(A) \leq \deg(P).$$

SENS DE L'IMPLICATION

Le résultat précédent n'est en aucun cas une équivalence !

Exemple 13 :

Si $Q = 1 + X$ et $P = 1 - X + X^2$, alors on a bien $\deg Q \leq \deg P$, mais Q ne divise pas P . (La vérification pourra se faire simplement à l'aide des racines. Argument que nous reverrons ici dans la suite du chapitre ci-dessous.)

III-2 Racine et divisibilité

Définition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une *racine* de P (ou un *zéro* de P) si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 14 :

i est racine de $P = X^2 + 1$ car $P(i) = i^2 + 1 = 0$.

ou de manière plus générale sur les polynômes réels de degré 2 :

Exemple 15 :

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On pose δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Ainsi, les racines de P sont

$$r_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$



Remarque :

Dit autrement, au cas par cas, ceci signifie que :

$$\begin{cases} \text{si } \Delta > 0 : & \delta = \sqrt{\Delta} \text{ et } r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{si } \Delta = 0 : & \delta = 0 \text{ et il y a une unique racine } r = \frac{-b}{2a} \\ \text{si } \Delta < 0 : & \delta = i\sqrt{|\Delta|} \text{ et } r_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$$

? Exercice 2

Vérifier que les racines précédentes fonctionnent également pour les polynômes à coefficients complexes.

Solution

Dans tous les cas, on a

$$\begin{aligned} a(X - r_1)(X - r_2) &= aX^2 - a(r_1 + r_2) + ar_1r_2 = aX^2 - a\frac{-2b}{2a} + a\frac{(-b)^2 - \delta^2}{4a^2} \\ &= aX^2 + bX + \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = aX^2 + bX + a\frac{4ac}{4a^2} \\ &= aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

Ainsi, r_1 et r_2 sont toutes deux des racines de P .

On rappelle ce résultat obtenu en première année, que l'on peut démontrer facilement à l'aide du TVI :

Propriété

Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

■ Exemple 16 :

Le polynôme $P = X^5 - 3X^2 + 1$ admet au moins une racine réelle (même si on ne sait pas la déterminer a priori...)

Proposition

Soient P un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \text{ divise } P.$$

Démonstration :

De même que pour les autres résultats, on peut généraliser aisément la démonstration de première année. $\square$

? Exercice 3

Montrer que $X + 1$ divise $X^5 + 3X^4 + X - 1$.

Solution

On note que $X + 1 = X - (-1)$. Or, si on note $P = X^5 + 3X^4 + X - 1$, on a

$$P(-1) = (-1)^5 + 3(-1)^4 + (-1) - 1 = -1 + 3 - 1 - 1 = 0$$

D'où $(X + 1)$ divise P .

Si on prend plusieurs racines, les facteurs s'enchaînent :

Propriété

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\text{Il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)Q \\ \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \text{ sont racines de } P \end{array} \right|$$

De plus, le polynôme Q ainsi défini est unique et $\deg Q = n - m$ avec $n = \deg P$.

Démonstration :

• Unicité :

Si $P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)Q_1$ et $P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)Q_2$, on a

$$(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)Q_1 = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)Q_2$$

Comme $(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m) \neq 0$, on a par simplification polynomiale :

$$Q_1 = Q_2$$

• $\Rightarrow$:

Les α_i sont clairement racines de P .

• $\Leftarrow$:

On le démontre ici par récurrence sur m .

★ Initialisation : Pour $m = 1$, c'est la proposition précédente.

★ Hérédité : On suppose que c'est vrai pour m et on le montre pour $m + 1$.

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ étant en particulier par hypothèse racines de P , l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe Q_1 tel que

$$P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)Q_1$$

Mais α_{m+1} est également racine de P . Ainsi

$$0 = P(\alpha_{m+1}) = \underbrace{(\alpha_{m+1} - \alpha_1) \dots (\alpha_{m+1} - \alpha_m)}_{\neq 0} Q_1(\alpha_{m+1})$$

D'où $Q_1(\alpha_{m+1}) = 0$; i.e. α_{m+1} est racine de Q_1 . Alors, par la proposition précédente, il existe Q tel que

$$Q_1 = (X - \alpha_{m+1})Q \quad \text{avec } Q(\alpha_{m+1}) \neq 0$$

D'où

$$P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)(X - \alpha_{m+1})Q$$

CQFD $\square$

? Exercice 4

Montrer que $(X - 1)(X - 2)$ divise le polynôme $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$

Solution

On a que $P(1) = P(2) = 0$, d'où le résultat.

Corollaire

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines deux à deux distinctes.

Démonstration :

Si on note m le nombre de racines 2 à 2 distinctes du polynôme et si on note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ces racines, alors, d'après la propriété précédente, on sait que $(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)$ divise P .

Par les considération de degré, on sait alors que

$$\deg((X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m)) \leq \deg P$$

mais $\deg((X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m))$ correspond également au nombre m ici de racines. D'où

$$m \leq \deg P$$

$\square$

■ Exemple 17 :

Le polynôme $X^3 + 2X$ n'a au maximum que 3 racines distinctes. (Si on fait le calcul ici on s'aperçoit que c'est 0, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.)

Le polynôme $X^3 + 2X^2 + X$ n'a au maximum que 3 racines distinctes. Si on les calcule, on s'aperçoit en effet qu'il n'y a que 0 et -1 .



ÉCRITURE

La recherche des racines non connues d'un polynôme doit se faire avec une certaine réserve au niveau des notations. Regardons ceci de plus près :

- soit on veut vérifier si un nombre α est racine, auquel cas, il n'y a pas de problème, on peut écrire sans soucis

$$P(\alpha) = \dots (\text{on remplace } X \text{ par } \alpha \text{ dans l'expression de } P(X)).$$

- soit on veut chercher les racines sous forme d'équation. Par exemple, on cherche les racines réelles de $X^4 - 2X$. Or

$$\text{l'écriture } X^4 - X = 0 \Leftrightarrow \dots \quad \text{est FAUSSE!!}$$

Rappelons en effet que $X^4 - X$ est une application et que $X^4 - X = 0$ signifie : "l'application $X^4 - X$ est nulle", ce qui est faux, car la seule possibilité pour un polynôme nul est que tous ses coefficients soient nuls. Or, ici ses coefficients ne le sont manifestement pas...

Pour solutionner ce problème, on cherchera les racines en posant plutôt l'équation $x^4 - x = 0$ où $x \in \mathbb{R}$.

(Pour information les solutions sont 0 et 1. Ainsi, $X^4 - X = X(X - 1)Q$ avec Q un polynôme de degré 2 sans racine dans $\mathbb{R}$.)



Remarque :

On notera que dans la propriété précédente sur la décomposition (p.6), on ne suppose pas que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ forme nécessairement l'ensemble de toutes les racines de P . Il peut y en avoir d'autres. cf. *exercices suivants*

? Exercice 5

On a vu précédemment que $(X - 1)(X - 2)$ divise le polynôme $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Déterminer "à vue" l'ensemble de toutes les racines de P par une recherche de racine évidente.

Solution

De part son degré, ce polynôme admet au maximum trois racines. On en a déjà 2 avec 1 et 2. Il en reste une seule éventuelle à trouver. On peut tenter des racines "évidentes" et on constate qu'en effet, -1 est elle aussi racine. Autrement dit, on est au complet et l'ensemble des racines de P est $\{-1, 1, 2\}$

Corollaire

Un polynôme de degré n qui a au moins $n + 1$ racines est nul.

Démonstration :

Notons P le polynôme en question et supposons par l'absurde qu'il soit non nul. Son degré n devrait majorer son nombre de racines, qui est par hypothèse $\geq n+1$. Ça donnerait $n \geq n+1$. Nous voici avec une belle contradiction ! $\square$



Remarque :

Le corollaire précédent s'applique en particulier sur une infinité de racines : un polynôme ayant une infinité de racines est nécessairement le polynôme nul.



Exercice 6

Montrer que la fonction sin ne peut pas être un polynôme.

Solution

Supposons que $P = \sin$ soit un polynôme. Comme on a $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une infinité de racines distinctes pour P , ce qui n'est possible que si $P = 0$. Ainsi, la fonction sin serait nulle, ce qui est faux !



Exercice 7

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes. Montrer que si on a une infinité de valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots \in \mathbb{K}$, deux à deux distinctes, telles que

$$P(\alpha_i) = Q(\alpha_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Alors on a tout simplement $P = Q$ (c'est-à-dire $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

Solution

Il suffit de poser le polynôme $H = P - Q$ qui a alors une infinité de racines $\alpha_i \forall i \in \mathbb{N}$ et qui est donc nul.



Définition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que :

- α est racine de P d'ordre (ou de multiplicité) au moins k si $(X - \alpha)^k$ divise P .
- α est racine de P d'ordre exactement k si $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P .
- Si α est racine de P d'ordre exactement 1, on dit que α est une racine simple de P .
- α est une racine double de P si α est racine de P d'ordre exactement 2.
- α est une racine multiple de P si α est racine de P d'ordre au moins 2.

Tout d'abord un petit rappel de première année sur les polynômes réels :

Proposition

Soit P un polynôme à coefficients réels. $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine multiple de P ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$$

Démonstration :

la démonstration a déjà été vue en première année, nous ne revenons pas sur la question. $\square$



Exercice 8

Montrer que 2 est racine multiple de $P = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$.

Solution

On vérifie que $P(2) = P'(2) = 0$



ATTENTION AUX GÉNÉRALISATIONS ABUSIVES

Ceci ne peut être généralisé aux polynômes à coefficients complexes ou aux racines complexes, n'ayant pas de définition de la dérivée dans $\mathbb{C}[X]$.

La propriété précédente (p.6) sur la décomposition en facteurs de degrés 1 peut être généralisée à la problématique "avec multiplicités" :

Théorème décomposition suivant les racines

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\left. \begin{array}{l} \text{Il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que} \\ P = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q \\ \text{avec } Q(\alpha_i) \neq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, m \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \text{ sont racines de } P \\ \text{d'ordres de multiplicité respectifs} \\ k_1, \dots, k_m \end{array} \right.$$

De plus, le polynôme Q ainsi défini est unique et $\deg Q = n - (k_1 + \dots + k_m)$ avec $n = \deg P$.

Démonstration :

- Unicité :

Si $P = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q_1$ et $P = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q_2$, on a

$$(X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q_1 = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q_2$$

Comme $(X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} \neq 0$, on a par simplification polynômiale :

$$Q_1 = Q_2$$

• $\Rightarrow :$

Les α_i sont clairement racines de P . Voyons maintenant leur ordre de multiplicité :

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Si on pose $T_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - \alpha_j)^{k_j} Q$, alors

$$P = (X - \alpha_i)^{k_i} T_i$$

et $T_i(\alpha_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\alpha_i - \alpha_j)^{k_j} Q(\alpha_i) \neq 0$. Donc k_i est bien l'ordre de multiplicité de α_i .

• $\Leftarrow :$

On le démontre ici par récurrence sur m .

★ Initialisation : Pour $m = 1$, c'est la définition de la multiplicité de α_1 .

★ Hérité : On suppose que c'est vrai pour m et on le montre pour $m + 1$.

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ étant en particulier par hypothèse racines de P d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \dots, k_m$, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe Q_1 tel que

$$P = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q_1$$

Mais α_{m+1} est également racine de P . Ainsi

$$0 = P(\alpha_{m+1}) = \underbrace{(\alpha_{m+1} - \alpha_1)^{k_1} \dots (\alpha_{m+1} - \alpha_m)^{k_m}}_{\neq 0} Q_1(\alpha_{m+1})$$

D'où $Q_1(\alpha_{m+1}) = 0$; i.e. α_{m+1} est racine de Q_1 . On note n son ordre de multiplicité dans Q_1 . Alors il existe Q tel que

$$Q_1 = (X - \alpha_{m+1})^n Q \quad \text{avec } Q(\alpha_{m+1}) \neq 0$$

D'où

$$P = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} (X - \alpha_{m+1})^n Q$$

On note

$$T = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m} Q$$

alors

$$P = (X - \alpha_{m+1})^n T$$

et on peut observer là encore, en réinjectant, que

$$T(\alpha_{m+1}) \neq 0$$

Ainsi, par définition, le n ci-dessus est également l'ordre de multiplicité de α_{m+1} dans P , c'est-à-dire que $n = m + 1$. CQFD $\square$

? Exercice 9

On sait que $(X - 1)(X - 2)$ divise le polynôme $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Déterminer par calcul toutes les racines de P .

Solution

1 et 2 sont racines. Comme $\deg P = 3$, d'après le théorème de décomposition, il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X - 1)(X - 2)(aX + b)$. On a donc

$$X^3 - 2X^2 - X + 2 = aX^3 - (a + 2a + b)X^2 + \dots$$

L'identification des coefficients nous dit alors que

$$a = 1, \quad a + 2a + b = 2, \quad \text{i.e. } a = 1, \quad b = -1$$

et donc $P = (X - 1)(X - 2)(X + 1)$. Les racines de P sont donc $-1, 1, 2$.

Corollaire *somme des multiplicités*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ sont des racines deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$k_1 + \dots + k_m \leq \deg(P)$$

Démonstration :

C'est une simple conséquence du théorème précédent : comme $(X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m}$ divise P , alors

$$\deg((X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m}) \leq \deg P$$

et

$$\deg((X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_m)^{k_m}) = k_1 + \dots + k_m$$

D'où

$$k_1 + \dots + k_m \leq \deg P$$

$\square$

Interprétation et corollaire du corollaire précédent :

Corollaire *Nombre de racines*

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

■ Exemple 18 :

Le polynôme $X^3 + 2X^2 + X$ n'a au maximum que 3 racines distinctes. Si on les calcule, on s'aperçoit qu'on n'a que 0 et -1 .

Néanmoins, on sait que la somme des multiplicités de chacune d'entre elles ne peut dépasser 3. Ainsi, on sait qu'au maximum, l'une sera de multiplicité maximum 2 et l'autre de multiplicité 1.

On s'aperçoit qu'on a en effet ici $X^3 + 2X^2 + X = X(X^2 + 2X + 1) = X(X + 1)^2$. Ainsi, -1 est racine double et 0 racine simple.

? Exercice 10

Déterminer l'ensemble des racines de $P = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4$ sachant qu'il a deux racines réelles doubles, dont 2 et que $P'(X) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$

Solution

Le polynôme P est réel. Une racine α est double ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Les racines étant ici doubles, on peut donc les chercher parmi celles de P' . On sait déjà que 2 est racine double. Vérifions maintenant si 1 est racine double :

$$P(1) = 1 - 2 - 3 + 4 + 4 = 4 \neq 0$$

1 n'est pas racine. L'autre racine double ne peut donc être que -1 . (On peut éventuellement le vérifier en constatant que $P(-1) = 0$)

Les deux racines doubles sont donc 2 et -1 . Il ne peut y avoir d'autres racines, puisque la somme des multiplicités vaut au moins $2 + 2 = 4 = \deg P$. On a donc ici l'ensemble de toutes les racines.

III-3 Racines dans $\mathbb{C}$ et décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Certains polynômes, construits au départ dans $\mathbb{R}$, peuvent néanmoins avoir des racines complexes. On prend pour exemple $P = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, qui n'a aucune racine réelle mais admet exactement deux racines complexes i et $-i$. On peut alors l'écrire en deux facteurs

$$\underbrace{X^2 + 1}_{\in \mathbb{R}[X]} = \underbrace{(X - i)}_{\in \mathbb{C}[X]} \underbrace{(X + i)}_{\in \mathbb{C}[X]}$$

mais il n'existe en revanche aucune décomposition dans $\mathbb{R}[X]$. Sinon, on aurait $X^2 + 1 = (X - a)(X - b)$ dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire deux racines a, b réelles.

Pour certaines nécessités de factorisation, on est donc amené à considérer les expressions dans $\mathbb{C}[X]$. Nous allons donc voir dans cette partie quelques propriétés spécifiques amenés par les complexes.



Remarque :

Notons que dans l'exemple précédent, les deux racines trouvées i et $-i$ sont conjuguées. D'ailleurs, on peut au passage rappeler que dans le cas plus général des racines d'un polynôme P de degré 2, avec $P = a + bX + cX^2$ avec $a \neq 0$, en cas de discriminant négatif ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$), on obtient également deux racines conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

et bien en réalité, ceci est vrai quel que soit le degré du polynôme mais avec néanmoins une "petite" (!) restriction aux polynômes **réels** :

Propriété

Soit P un polynôme à coefficients réels. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors $P(\bar{\alpha}) = 0$, c'est-à-dire que $\bar{\alpha}$ est également racine de P .

Démonstration :

On note $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec par hypothèse $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On sait que $P(\alpha) = 0$. Comme $P(\alpha)$ est un nombre, on peut prendre son complémentaire "de chaque côté de l'égalité" :

$$\overline{P(\alpha)} = \bar{0}$$

Or, d'une part,

$$\overline{P(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \dots + \bar{a}_n \bar{\alpha}^n$$

Mais comme les a_i sont tous réels, on a

$$\bar{a}_i = a_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

et donc

$$\overline{P(\alpha)} = a_0 + a_1\bar{\alpha} + \dots + a_n\bar{\alpha}^n = P(\bar{\alpha})$$

D'autre part, on a également

$$\bar{0} = 0$$

d'où, en combinant les deux résultats et en réinjectant dans la première ligne, on obtient

$$P(\bar{\alpha}) = 0$$

c'est-à-dire que le conjugué de α est racine également $\square$

Commentaires :

Ce résultat est valable que α soit complexe non réel, ou réel. En effet, si jamais $\alpha \in \mathbb{R}$, la propriété dit simplement que si α est racine, alors $\bar{\alpha} = \alpha$ est racine. Bref, il n'y a pas spécialement de contradiction, mais juste un "non résultat" !



IL FAUT DES COEFFICIENTS RÉELS

Il faut bien faire attention ici à avoir un polynôme dont **tous** les coefficients sont **réels** ! En effet : Le polynôme $X - i \notin \mathbb{R}[X]$ a i comme racine, mais son conjugué $-i$ n'est pas racine. (à vérifier...)



Remarque :

Ce résultat nous dit en particulier que si on a trouvé une racine complexe α d'un polynôme réel P , alors on en a automatiquement une autre $\bar{\alpha}$. Ainsi, $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ divise P . Or,

$$Q = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$$

qui est du coup un polynôme réel. Ainsi, on a trouvé un polynôme réel Q de degré 2 tel que Q divise P .

? Exercice 11

Montrer que i est racine de $P = -X^3 + X^2 - X + 1$ et en déduire que $X^2 + 1$ divise P .

Solution

On a que $P(i) = -i^3 + i^2 - i + 1 = i - 1 - i + 1 = 0$.

Comme P est un polynôme réel, on sait alors que $-i$ est également racine de P et donc que $Q = (X - i)(X + i)$ divise P . Or, $Q = X^2 + 1$, d'où le résultat.

Voyons maintenant un résultat très important sur les polynômes, qui est la base de la décomposition en sous-facteurs :

Théorème De D'Alembert

Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes **non constant**. P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : admise. $\square$

Corollaire

Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique dans $\mathbb{C}[X]$ (à l'ordre près) sous la forme :

$$P = \lambda \times (X - \alpha_1)^{k_1} \times \dots \times (X - \alpha_m)^{k_m}$$

avec :

- λ le coefficient dominant de P .
- m un entier naturel.
- $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ les racines de P de multiplicités respectives $k_1, \dots, k_m$.
- $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ le degré de P .

■ Exemple 19 :

Si $\sqrt{2}$ est le coefficient dominant d'un polynôme P dont les racines sont i et 2 avec des multiplicités respectives de 3 et 1 alors P est nécessairement le polynôme suivant :

$$P = \sqrt{2}(X - i)^3 \times (X - 2).$$



Définition

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ (en produit de facteurs irréductibles) signifie qu'il faut trouver cette décomposition en facteurs de degré 1.



Exercice 12

Montrer que i et 1 sont racines de $P = -X^3 + X^2 - X + 1$. En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ de P .

Solution

On a déjà vu dans l'exercice précédent que $P(i) = 0$. De même,

$$P(1) = 0$$

Ainsi, i et 1 sont bien des racines.

Le polynôme P étant réel, on sait que $-i$ est racine également.

De plus, P étant de degré 3, il ne peut pas y avoir plus de 3 racines. On les a donc toutes et on obtient dans la foulée l'existence de Q de degré $3 - 3 = 0$ tel que

$$P = (X - i)(X + i)(X + 1)Q$$

Q étant constant, c'est le coefficient dominant, c'est-à-dire -1 . Ainsi,

$$P = -(X - i)(X + i)(X + 1)$$